Διάλεξη 11η : Πέμπτη 19 Μάη 2016, 6-9 μ.μ.

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

ΘΕΜΑ: Η γραμμική εξίσωση Fredholm - Επαναληπτικοί πυρήνες

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)y(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Πρόταση. Αν

- Η f είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη.
- $B := \int_a^b \int_a^b K^2(t,s)dtds < \infty$
- $\lambda B < 1$

τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση η οποία δίνεται από την σχέση

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b \Gamma(t,u;\lambda)f(u)du,$$

όπου

$$\Gamma(t,s;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_i(t,s)$$

και

$$K_1(t,s) = K(t,s) \quad K_{n+1}(t,s) = \int_a^b K(t,u)K_n(u,s)du$$

Απόδειξη.

- Η σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \phi_1(t)$$

- Το μονοσήμαντο.

Παραδείγματα

Αν ο πυρήνας είναι αυτο-ορθογώνιος τότε

$$\Gamma(t,s;\lambda) = K(t,s)$$

και συνεπώς

$$y(t) = f(t) + \int_a^b K_n(t,u)f(u)du.$$

Παραδείγματα

Αν ο πυρήνας είναι συμμετρικός τότε όλοι οι επαναληπτικοί πυρήνες είναι συμμετρικοί (άρα και ο επιλύων).

Παραδείγματα